

研究简报

多轴应力应变的一种新的计算方法*

NEW METHOD FOR CALCULATING ELASTO-PLASTIC STRAINS AND STRESSES UNDER MULTIAXIAL LOADING

刘克格**¹ 阎楚良¹ 尚德广² 张书明¹

(1. 中国农业机械化科学研究院, 北京 100083) (2. 北京工业大学 机电学院, 北京 100022)

LIU Ke Ge¹ YAN ChuLiang¹ SHANG De Guang² ZHANG ShuMing¹

(1. Chinese Academy of Agricultural Mechanization Sciences, Beijing 100083, China)

(2. College of Mechanical Engineering and Applied Electronics, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

摘要 计算缺口件缺口处的应力应变方法有多种,其中应用较广的是具有能量观点的 Neuber 法和等效应变能密度法。通常 Neuber 法过高地估计应力和应变,等效应变能密度法过低地估计应力和应变。通过分析研究,文中引进屈服强度参数,提出一种新的计算方法。通过对同一构件缺口处的应力应变的计算结果进行比较可知,文中提出的新的计算方法是合理可行的,有较好的精度。

关键词 Neuber 法 等效应变能密度法 缺口 应力 应变

中图分类号 O344.3

Abstract Many methods that may apply to calculate the strains and stresses of notches have been presented. In generally Neuber's rule and equivalent strain energy density (ESED) method were widely used, which have certain physical meaning. Neuber's rule tends to overestimate stresses and strains. Contrary to Neuber's rule, ESED method usually underestimates stresses and strains. The authors investigate the problem and put forward a new approach by making use of yield stress. The new method is the same as Neuber's rule when the notches are in elastic state, but in plastic they are different. A notch tip stresses and strains have been calculated by adopted the three methods and finite element method (FEM). The results show that the new approach is more reasonable.

Key words Neuber's rule; Equivalent strain energy density (ESED) method; Notches; Stress; Strain

Corresponding author: LIU KeGe, E-mail: bjlkge@163.com, Tel: +86-10-64882655

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 50135010)

Manuscript received 20040618, in revised form 20040914.

1 引言

工程构件的疲劳破坏通常发生在应力集中区,而缺口是发生应力集中的主要部位,因此得出此处的应力应变具有重要的意义。采用测量的方法在实际中有时并不可行,而用有限元进行计算,尽管可以得到较精确的计算结果,但有限元的正确使用仅仅局限于少数专业人士,因此目前在工程中通常使用某种近似公式进行估算。在工程实际中,构件受到单轴加载的情况很少,实际上即便是单轴加载的情况在缺口处也将是受到多轴加载,因此本文将针对多轴比例加载下的缺口件进行应力应变分析。

2 应力应变计算方法

2.1 应力应变分析

在阐述此应力计算方法之前,先分析缺口构件在

缺口处的应力应变状态,如图 1。

当构件处于平面应力时,其应力应变分量不为 0 的为 σ_{22} 、 σ_{11} 、 σ_{23} 、 σ_{33} 。

当构件处于平面应变时,其应力应变分量不为 0 的有 σ_{22} 、 σ_{33} 、 σ_{11} 、 σ_{23} 。

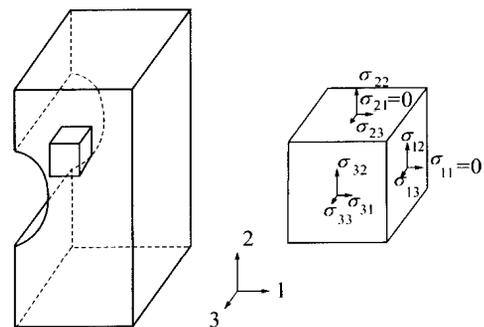


图 1 缺口处应力分量

Fig. 1 Notation for stress components at the notch tip

* 20040618 收到初稿, 20040914 收到修改稿。国家自然科学基金资助项目 (50135010)。

** 刘克格, 男, 1973 年 2 月生, 辽宁凌源人, 汉族。中国农业机械化科学研究院博士研究生, 研究方向为机械结构可靠性设计。

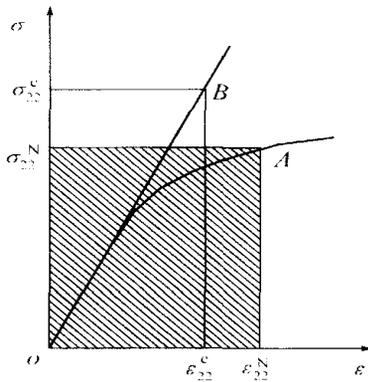


图2 Neuber 法
Fig.2 Neuber's rule

一般情况下应力应变分量不为 0 的有 ϵ_{22} 、 ϵ_{33} 、 ϵ_{11} 、 ϵ_{23} 、 ϵ_{32} 、 ϵ_{33} 。由于 $\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$ 、 $\epsilon_{33} = \epsilon_{33}$ ，所以有 7 个未知量。

2.2 计算公式

2.2.1 Neuber 理论分析方法^[1-3]

从上边的应力状态分析中可以看出,当构件处于平面应力状态时(平面应变状态类似)有四个分量,即一个应力分量和三个应变分量。为了得到这四个分量,需要四个方程。由 Neuber 公式可以提供一个方程,通过化简可以得到

$$\epsilon_{22}^e \epsilon_{22}^e = \frac{N_{22} N_{22}}{\epsilon_{22}^e \epsilon_{22}^e} \quad (1)$$

式中 ϵ^e ——完全弹性状态相应物理量的值

N ——用 Neuber 法计算相应物理量的值

此式具有能量意义,从图 2 中可以看出,虽然缺口处于塑性状态,但总应变能密度与缺口处于线弹性状态时的总应变能密度相等,即阴影面积与 B 点和两坐标轴围成的矩形面积相等。另外三个方程可根据本构关系给出。

当构件处于多轴应力状态时,由上边的分析并考虑到 $\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$ 、 $\epsilon_{33} = \epsilon_{33}$ 可知,有三个应力分量和四个应变分量共七个未知参量。本构方程只能提供四个方程,因此还需要三个额外的方程才能得出这七个未知参量。

在多轴状态时,把在单轴状态下的 Neuber 公式(1)推广到多轴应力状态。式(1)推广到多轴状态下的张量形式如下

$$\epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e = \frac{N_{ij} N_{ij}}{\epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e} \quad (2)$$

$i, j = 1, 2, 3$ 累加。

由于在实际解决问题时,用主应力应变表示比较方便,此时应力应变状态用五个未知量即 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 表示。这样只需要五个方程就可以解出未知的参量。用主应力可以把等式(2)写成如下形式

$$\epsilon_1^e \epsilon_1^e + \epsilon_2^e \epsilon_2^e + \epsilon_3^e \epsilon_3^e = \frac{N_1 N_1}{\epsilon_1^e \epsilon_1^e} + \frac{N_2 N_2}{\epsilon_2^e \epsilon_2^e} + \frac{N_3 N_3}{\epsilon_3^e \epsilon_3^e} \quad (3)$$

根据本构关系,并假设 $\epsilon_{eq}^p = f(\epsilon_{eq}^e)$, 这里 $f(\epsilon_{eq}^e)$

是单轴拉压情况下本构关系中的等效塑性应变表达函数, p 代表塑性状态相应物理量的值。则本构方程可以写成如下三个方程

$$\epsilon_1^N = - \frac{1}{E} \left(\frac{N_2}{2} + \frac{N_3}{3} \right) - \frac{f(\epsilon_{eq}^N)}{2 \epsilon_{eq}^N} \left(\frac{N_2}{2} + \frac{N_3}{3} \right) \quad (4)$$

$$\epsilon_2^N = \frac{1}{E} \left(\frac{N_2}{2} - \frac{N_3}{3} \right) + \frac{f(\epsilon_{eq}^N)}{2 \epsilon_{eq}^N} \left(2 \frac{N_2}{2} - \frac{N_3}{3} \right) \quad (5)$$

$$\epsilon_3^N = \frac{1}{E} \left(\frac{N_3}{3} - \frac{N_2}{2} \right) + \frac{f(\epsilon_{eq}^N)}{2 \epsilon_{eq}^N} \left(2 \frac{N_3}{3} - \frac{N_2}{2} \right) \quad (6)$$

其中

$$\epsilon_{eq}^N = \sqrt{\left(\frac{N_2}{2} \right)^2 - \frac{N_2 N_3}{3} + \left(\frac{N_3}{3} \right)^2}$$

——泊松比

这样为解上述问题还缺一个条件。诸多试验表明,在比例加载情况下,缺口处最大主应力应变的应变能密度与总应变能密度之比与假设缺口处处于完全线弹性情况时最大主应力应变的应变能密度与总应变能密度之比相等,即

$$\frac{\epsilon_2^e \epsilon_2^e}{\epsilon_2^e \epsilon_2^e + \epsilon_3^e \epsilon_3^e} = \frac{\frac{N_2 N_2}{2}}{\frac{N_2 N_2}{2} + \frac{N_3 N_3}{3}} \quad (7)$$

通过以上各式,应力应变即可求出。

2.2.2 等效应变能密度法理论^[1-3]

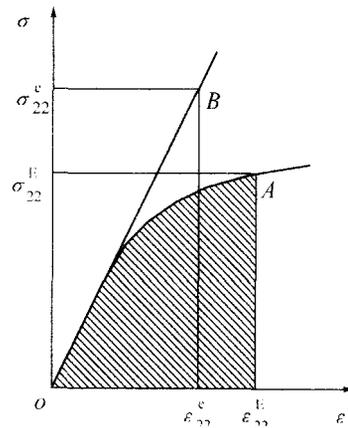


图3 等效应变能密度法

Fig.3 Equivalent strain energy density method (ESED)

此方法最初是在缺口件处于平面应力状态下提出的。其形式如下

$$\int_0^{\epsilon_{22}^e} \epsilon_{22}^e d \epsilon_{22}^e = \int_0^{\epsilon_{22}^N} \epsilon_{22}^e d \epsilon_{22}^e \quad (8)$$

式中上标 E 为等效应变能密度法计算相应物理量的值。

从图 3 中可以看出,虽然缺口处在塑性状态,但其应变能密度与缺口处在弹性状态下的应变能密度相等,即阴影面积与直线 OB 和横轴组成的三角形面积相等,这种方法称为等效应变能密度法 (equivalent strain energy density method, 简记为 ESED 法)。

其他方程的分析方法与上述相同。在平面应力状态,本构方程和公式(8)联立即可解决,此时公式(8)的具体形式如下。

等效应变能密度公式

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_{22} \\ \epsilon_{22} \end{pmatrix} = \frac{E_d}{2E} \begin{pmatrix} \epsilon_{22} \\ \epsilon_{22} \end{pmatrix} \quad (9)$$

多轴加载的一般情况下,等效应变能密度公式的具体形式如下。

等效应变能密度公式

$$\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \epsilon_{22} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3E} (1 + \dots) \left(\frac{E}{\epsilon_{eq}} \right)^2 + \frac{1-2\nu}{6E} \left(\frac{E}{\epsilon_{22}} + \frac{E}{\epsilon_{33}} \right) + \frac{p^E}{\epsilon_{eq}} \frac{E}{\epsilon_{eq}} d \frac{p^E}{\epsilon_{eq}} \quad (10)$$

其中

$$\frac{p^E}{\epsilon_{eq}} = f \left(\frac{E}{\epsilon_{eq}} \right)$$

$$\frac{E}{\epsilon_{eq}} = \sqrt{\left(\frac{E}{\epsilon_{22}} \right)^2 - \frac{E}{2} \frac{E}{\epsilon_{33}} + \left(\frac{E}{\epsilon_{33}} \right)^2}$$

ϵ_{eq} —— 等效的对应项的值

p —— 塑性对应项的值

2.2.3 多轴修正 Neuber 法模型的建立

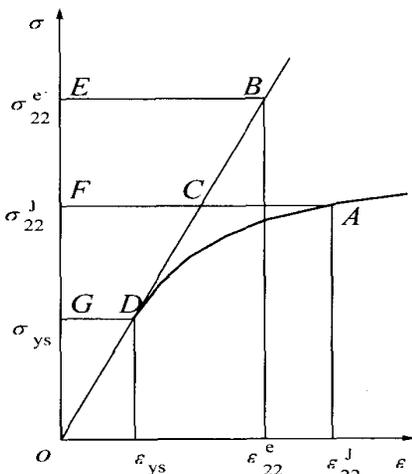


图 4 多轴应力应变计算的修正 Neuber 法原理图

Fig. 4 Modified Neuber's rule under multiaxial loading

通过图 2 和图 3 可以看出,在弹性范围内 Neuber 法和等效应变能密度法所计算的应力和应变是相等的,但是进入塑性状态以后,二者却是有差异的。因此在计算应力应变的公式中,应该有体现屈服强度的参量 σ_{ys} 。一般情况下 Neuber 法过高地估计应力应变,给出应力应变估算结果的上限;而 ESED 法过低地估计应力应变,给出应力应变估算结果的下限。通过对 Neuber 法和等效应变能密度法仔细分析,并且考虑应力应变曲线关系的几何表示,可以发现二者的区别主要表现为 Neuber 法比等效应变能密度法所计算的面积要大一些,并设此面积差为 S 。为了使计算结果更符合工程实际,并使其位于这两种计算方法所得的结果之间,从 Neuber 法所代表的面积中减去它比等效应变

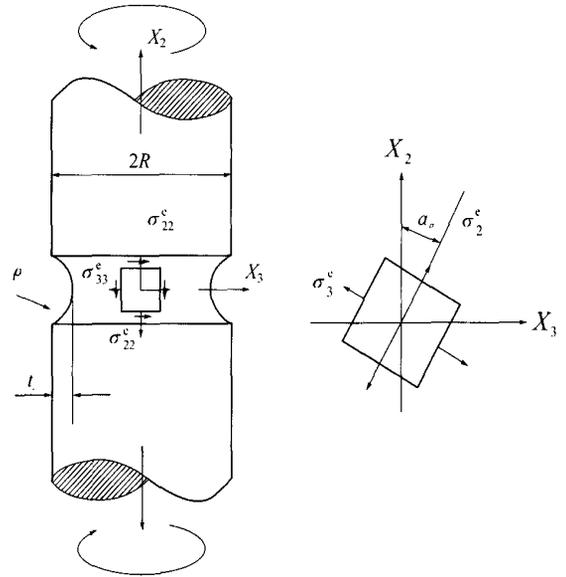


图 5 几何尺寸及应力状态图

Fig. 5 Geometry and stress state of the cylindrical specimen

能密度法所大的面积 S 的一半,表现在本文提出的公式(11)中,即取系数 k_1 为 0.5。通过对图 4 进行分析,本文提出新的计算方法,在主应力应变状态下其表达式为

$$\left\{ 1 - \frac{1}{2} k_1 \left[1 - \frac{(\sigma_{ys})^2}{(\sigma_{22}^e)^2} \right] \right\} \left(\begin{pmatrix} \epsilon_{22} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} \right) = \frac{J}{2} \frac{J}{2} + \frac{J}{3} \frac{J}{3} \quad (11)$$

J 为新方法计算对应物理量的值。式中的 $k_1 = 0.5$,并且要求 $\sigma_{ys} < \sigma_{22}^e$ 。如果 $\sigma_{ys} > \sigma_{22}^e$,此时认为 $\sigma_{ys} = \sigma_{22}^e$,公式(11)变成 Neuber 公式(3)。

3 应用举例

下面用上述三种方法分析拉扭组合载荷下带有缺口的圆柱体(图 5)。图中有 $t/R = 0.3$ 、 $R/t = 7$,并要求在加载过程中 $\sigma_n = 2.5 \sigma_{nF}$ 。二者的计算公式分别为

$$\sigma_{nF} = \frac{F}{(R-t)^2} \quad (12)$$

$$\sigma_n = \frac{2T}{(R-t)^3} \quad (13)$$

通过对其弹性分析可以得到如下结论

$$\sigma_{22}^e = 37.7^\circ \quad \epsilon_{22}^e = 8.126 \text{ nF}$$

$$\epsilon_{33}^e = -3.186 \text{ nF} \quad \frac{\epsilon_{33}^e}{\epsilon_{22}^e} = -0.392$$

其中 主轴角度

此材料应力应变关系如下

$$\sigma = \frac{E}{\epsilon} \quad \epsilon < 0 \quad (14)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{H} \quad \epsilon > 0 \quad (15)$$

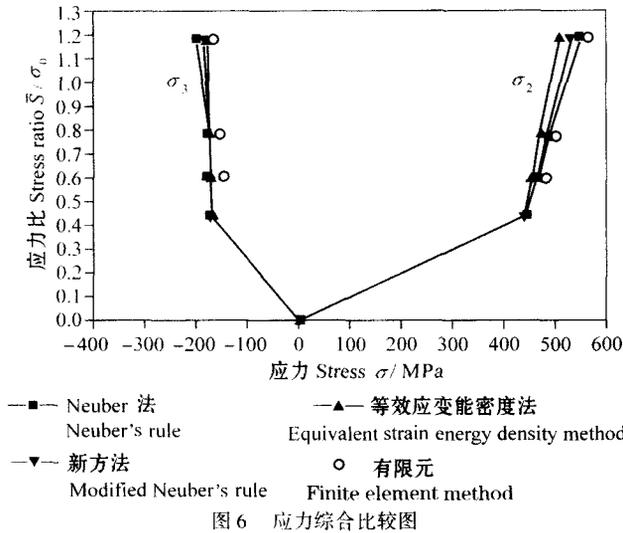


图 6 应力综合比较图

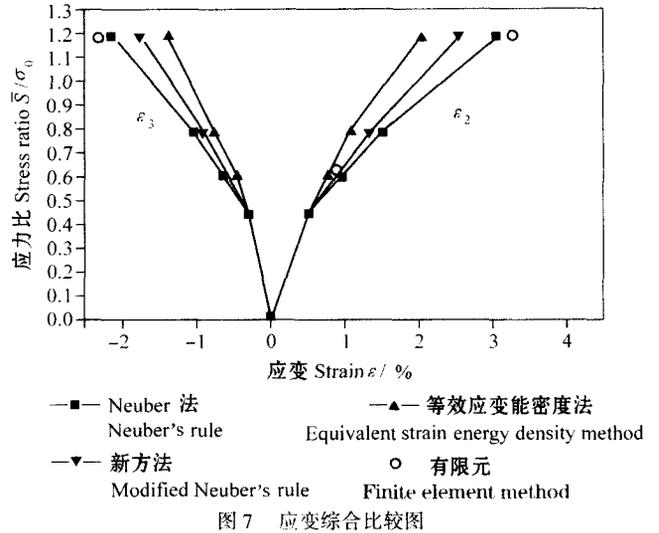


图 7 应变综合比较图

其中 E 弹性模量
 H 弹塑性模量
 σ_0 材料的应力应变曲线参数

有关此材料的常数为 $E = 94\ 400\ \text{MPa}$, $H = 0.05 E$, $\sigma_0 = 550\ \text{MPa}$, $n = 0.3$ 。

计算结果见图 6 和图 7。图中的 $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{nF} + 3} \frac{\sigma}{\sigma_0}$ 。有限元结果来自文献[4]。从图中可以看出本文计算方法的结果比用等效应变能密度法计算的结果稍大,比用 Neuber 法计算的结果稍小,总是居于二者之间。

4 结论

- 1) 通常 Neuber 法过高地估计应力应变,而等效应变能密度法 (ESED) 过低地估计应力应变。
- 2) 本文考虑了 Neuber 法和等效应变能密度法的异同,并且提出一个修正的 Neuber 公式,此公式在弹性状态时与 Neuber 公式完全相同。而从结果图中及理论分析可知,在弹性状态下,这三种方法实际相同。
- 3) 所得结果与 Neuber 法和等效应变能密度法

的结果比较 (见图 6、图 7) 表明,本方法能较精确地估算多轴加载下缺口根部的应力应变,且便于工程实际应用。

4) 通过上文中所述,当用主应力去代替应力偏量时,会产生问题。文献[1]经过研究指出,当在比例加载的情况下,这种误差并不大。

References

- 1 Mofakhar A, Buczynski A, Glinka G. Calculation of elasto-plastic strains and stresses in notches under multiaxial loading. *Int J. Fracture*, 1995, 70:357 ~ 373.
- 2 Glinka G. Calculation of elasto-plastic strains and stresses in notched bodies subjected to multiaxial cyclic loading. *Multiaxial Fatigue AE-28*, In: Cordes T, Lease K, eds. Society of Automotive Engineers-SAE, Warrendale, Pa., 1999. 99 ~ 116.
- 3 Glinka G, Shen G, Plumtree A. A multiaxial fatigue strain energy density parameter related to the critical fracture plane. *International Journal of Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 1995, 18:37 ~ 46.
- 4 Hoffmann M, Seeger T. The use of Hencky's equations for the estimation of multiaxial elastic-plastic notch stress and strains. Darmstadt: Report No. FB-3/1986, Technische Hochschule Darmstadt, 1986.